บทที่ 3 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

1. ประพจน์

ประพจน์ คือข้อความที่สามารถบอกได้ว่า มีค่าความจริง **เป็นจริง** หรือ**เป็นเท็จ**

T - แทน ข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริง

F - ——— เป็นเท็จ

Ex1 จงพิจารณาว่า ข้อความใดเป็นประพจน์

1. สุนัขมี 3 ขา → เป็นประพจน์ (F)
2. เธอชอบดู Youtube → ไม่เป็นประพจน์ เพราะบอกไม่ได้ว่า "เธอ" คือใคร? จึงบอกไม่ได้ว่า เป็นจริง หรือเท็จ
3. $x + 3 = 11$ → ไม่เป็นประพจน์ เพราะบอกไม่ได้ว่า $x =$ เท่าไร? จึงบอก T หรือ F ไม่ได้
4. $9 + 3 = 11$ → เป็นประพจน์ (F)
5. ฉันไม่ได้เองแหละ → ไม่เป็นประพจน์ #

2. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม

และ ใช้ $\wedge$

หรือ ใช้ $\vee$

ถ้า ... แล้ว ... ใช้ $\rightarrow$

... ก็ต่อเมื่อ ... ใช้ $\leftrightarrow$

Ex2 ถ้า P แทนประพจน์ $5 + 3 = 8$ → T

และ Q แทนประพจน์ $6 \times 7 = 99$ → F แล้ว

1) $P \wedge Q$ หมายถึง $T \wedge F$
2) $P \vee Q$ ⟶ $T \vee F$
3) $P \rightarrow Q$ ⟶ ถ้า T แล้ว F
4) $P \leftrightarrow Q$ ⟶ T ก็ต่อเมื่อ F เป็นต้น #

3. ค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อม

3.1 ค่าความจริง ของ $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	$T \wedge T = T$ ★
T	F	$T \wedge F = F$
F	T	$F \wedge T = F$
F	F	$F \wedge F = F$

กรณี และ ($\wedge$)

จะมี $T \wedge T = T$ เท่านั้น

ถ้ามี F แม้แต่กรณีเดียว ผลลัพธ์ = F ทันที ***

3.2 ค่าความจริง ของประพจน์ $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
T	T	$T \vee T = T$
T	F	$T \vee F = T$
F	T	$F \vee T = T$
F	F	$F \vee F = F$ ★

กรณี หรือ ($\vee$)

จะมี $F \vee F = F$ เท่านั้น

ถ้ามี T แม้แต่กรณีเดียว ผลลัพธ์ = T ทันที **

3.3 ค่าความจริงของ $P \rightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	$T \rightarrow T = T$
T	F	$T \rightarrow F = F$ ★
F	T	$F \rightarrow T = T$
F	F	$F \rightarrow F = T$

มีกรณีเดียวที่ $T \rightarrow F = F$
นอกนั้น ถ้าไม่ใช่รูปแบบของ $T \rightarrow F$
จะให้ค่าความจริง เป็น จริง (T) ทั้งหมด

► ถ้า Q มีค่าความจริงเป็น T ผลลัพธ์จะเป็น T เสมอ
เช่น $T \rightarrow T$, $F \rightarrow T$ เป็นต้น

► ถ้า P มีค่าความจริงเป็น F ผลลัพธ์จะเป็น T เสมอ
เช่น $F \rightarrow T = T$
$F \rightarrow F = T$ เป็นต้น

3.4 ค่าความจริงของ $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	$T \leftrightarrow T = T$
T	F	$T \leftrightarrow F = F$ ★
F	T	$F \leftrightarrow T = F$ ★
F	F	$F \leftrightarrow F = T$

มีสองกรณีที่ $P \leftrightarrow Q$ ให้ค่าความจริงเป็น เท็จ (F)
คือ P และ Q มีค่าความจริงที่แตกต่างกัน เช่น

$\left.\begin{array}{l} P = T \text{ แต่ } Q = F \\ \text{หรือ } P = F \text{ แต่ } Q = T \end{array}\right\}$ จะให้ค่าความจริง = F เสมอ

<u>แต่กรณีที่</u> P และ Q มีค่าความจริงที่เหมือนกัน
เช่น P Q

$\left.\begin{array}{l} T \leftrightarrow T \\ F \leftrightarrow F \end{array}\right\}$ ผลลัพธ์ = T เสมอ ★★★

4. นิเสธของประพจน์ และค่าความจริง

นิเสธของประพจน์ P คือ $\sim P$

เช่น

ประพจน์ P	นิเสธของประพจน์ P
$3+7=10$	$3+7 \neq 10$
$9 \times 5 = 45$	$9 \times 5 \neq 45$
สินธรมีลูกหมา	สินธรไม่มีลูกหมา
ลิงปีนต้นมะพร้าว	ลิงไม่ได้ปีนต้นมะพร้าว

$\left[\begin{array}{l} \sim P = T \text{ เมื่อ } P = F \\ \sim P = F \text{ เมื่อ } P = T \end{array}\right]$ หรือ ประพจน์

P	~P
T	F
F	T

<u>Ex3</u> ถ้า P, Q และ R เป็นประพจน์ โดยที่ $P \leftrightarrow Q$ มีค่าความจริงเป็น จริง และ $R \rightarrow P$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ
จงหาค่าความจริงของ $\sim(Q \rightarrow R)$

<u>Sol</u> โจทย์กำหนดให้ $P \leftrightarrow Q$ มีค่าความจริงเป็น T
และ $R \rightarrow P \longrightarrow$ **F** ★★ ดังนั้น $\left.\begin{array}{l} R = T \\ P = F \end{array}\right\}$ เพราะ $T \rightarrow F = F$

เมื่อ $R = T$ และ $P = F$ ซึ่งส่งผลให้ $P \leftrightarrow Q = T$ แล้ว

$\therefore$ $F \leftrightarrow Q = T$ นั่นทำให้ $Q = F$ เพราะ $F \leftrightarrow F = T$

แล้วมาหาค่าความจริงของ $Q \rightarrow R$ โดยที่ $Q = F$
ในกรณีที่ $R = T$
ดังนั้น $F \rightarrow T = T$
$\therefore$ $\sim(Q \rightarrow R) = \sim(T) = F$

<u>ตอบ</u>

Ex4 ให้ P, Q และ R เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว

1) ถ้า $P \wedge Q = F$ และ $P = T$ แล้ว

$T \wedge F = F \quad \therefore Q = F$

2) ถ้า $P \leftrightarrow Q = T$ และ $P = F$ แล้ว

$F \leftrightarrow F = T \quad \therefore Q = F$

3) ถ้า $P \vee Q = T$ และ $Q = F$ แล้ว

$T \vee F = T \quad \therefore P = T$

4) ถ้า $P \rightarrow Q = T$ และ $P = F$ แล้ว

$F \rightarrow T = T$

หรือ $F \rightarrow F = T$

$\therefore Q = T$ หรือ F ก็ได้ สรุปไม่ได้แน่นอน

5) ถ้า $P \rightarrow Q = T$ และ $Q = F$

$\therefore F \rightarrow F = T \quad \therefore P = F$

6) ถ้า $P \leftrightarrow Q = T$ และ $\sim Q = F$

$\therefore Q = T$

$\therefore T \leftrightarrow T = T \quad \therefore P = T$

7) ถ้า $P \rightarrow Q = F$ และ $R \wedge P = F$ แล้ว จงหา $\sim R$

จาก $P \rightarrow Q = F$

$T \rightarrow F = F$ ได้ $P = T$ และ $Q = F$

ต่อมา $R \wedge P = F$

$F \wedge T = F$ ได้ $R = F$ ซึ่งทำให้ $\sim R = T$

8) ถ้า $P \wedge (\sim Q) = T$ และ $P \rightarrow R = T$ แล้ว จงหาค่าความจริงของ $R \leftrightarrow Q$

จาก $P \wedge \underbrace{(\sim Q)} = T$

$T \wedge T = T \quad \therefore P = T$ และ $\sim Q = T$

$\therefore Q = F$

และ $P \rightarrow R = T$

$T \rightarrow T = T \quad \therefore R = T$

สุดท้าย ทำให้ $R \leftrightarrow Q = T \leftrightarrow F = F$

5. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

ตัวอย่างเช่น $P \wedge [Q \wedge (\sim R)]$

$[(\sim Q) \vee R] \leftrightarrow (\sim P)$

Note: การหาค่าความจริง เราต้องหาค่าความจริงในวงเล็บก่อน
ถ้าในหนังสือบางเล่มไม่ใส่วงเล็บ ให้หาค่าความจริงของ $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ และ $\leftrightarrow$ ตามลำดับ
(ก่อน ⟶ หลังสุด)

Note 2: 1) ประพจน์ย่อย P, Q, R, ... ซึ่งยังไม่มีการกำหนดค่าความจริง
เราเรียก P, Q, R, ... ว่าเป็น ตัวแปรแทนประพจน์ใดๆ

2) เราเรียกประพจน์ที่เกิดจากการนำ ตัวแปรแทนประพจน์ใดๆ มาเชื่อมต่อกันด้วยตัวเชื่อมว่า รูปแบบของประพจน์ เช่น

$P \wedge \sim Q$ อยู่ในรูปแบบ $\square \wedge \sim \triangle$

$(P \rightarrow Q) \vee R$ ―― $(\square \rightarrow \triangle) \vee \diamond$

$\sim Q \rightarrow \sim P$ ―― $\sim \triangle \rightarrow \sim \square$ เป็นต้น

ซึ่ง ถ้ายังไม่มีการกำหนดค่าความจริง T หรือ F ให้กับ P, Q และ R รูปแบบ $\square \wedge \sim \triangle$, $(\square \rightarrow \triangle) \wedge \diamond$ หรือรูปแบบใดๆ จึงถูกเรียกว่า รูปแบบของประพจน์

3) เนื่องจากค่าความจริงรูปแบบของประพจน์มีมากมาย ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์ย่อย
$\therefore$ เพื่อความสะดวก เราจึงนิยมสร้างตารางแจกแจงค่าความจริง ของรูปแบบของประพจน์

Ex 5 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $\sim Q \rightarrow (P \vee Q)$

P	Q	$\sim Q$	$P \vee Q$	$\sim Q \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

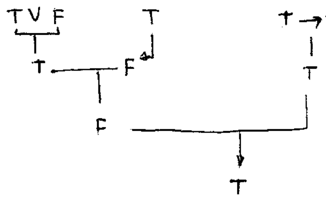
Ex 6 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $(P \wedge Q) \rightarrow R$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

★ กรณีโจทย์กำหนดค่าความจริงของประพจน์บางประพจน์มาให้
กรณีนี้ เราไม่ต้องสร้างตารางแสดงค่าความจริง เราจะใส่ค่าความจริงให้ตรงกับประพจน์แต่ละประพจน์ ที่โจทย์กำหนดให้ หลังจากนั้น ก็หาค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อม โดยการเชื่อมโยงจากค่าความจริงที่รู้แล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Ex 7 ให้ P, Q และ R เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริง เป็น จริง, เท็จ และ จริง ตามลำดับ
จงหาค่าความจริงของประพจน์ $[(P \vee Q) \wedge (\sim P)] \rightarrow (R \rightarrow P)$

Sol จากรูปแบบของประพจน์ $[(P \vee Q) \wedge (\sim P)] \rightarrow (R \rightarrow P)$



จากแผนภาพ จะได้ว่า ประพจน์ $[(P \vee Q) \wedge (\sim P)] \rightarrow (R \rightarrow P)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ตอบ

Ex 8 ให้ P, Q และ R เป็นประพจน์ซึ่ง $P \vee Q$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ และ $Q \leftrightarrow R$ มีค่าความจริงเป็นจริง
จงหาค่าความจริงของ $(P \wedge Q) \leftrightarrow (R \wedge \sim P)$

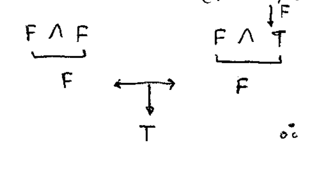
Sol จากรูปแบบของประพจน์ $(P \vee Q)$

$$\begin{array}{ccc} P & \vee & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \vee & F \end{array} \quad \therefore P = F \text{ และ } Q = F$$

ต่อมา $Q \leftrightarrow R$ โดยที่ $Q = F$
$F \leftrightarrow \square = T$ ดังนั้น $R = F$
เพราะ $F \leftrightarrow F = T$

สรุปว่า ค่าความจริงของ $P = F$, $Q = F$ และ $R = F$

ดังนั้น ค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \longleftrightarrow (R \wedge \sim P)$



∴ ประพจน์ดังกล่าวมีค่าความจริงเป็น จริง ตอบ

Ex9 ให้ P, Q และ R เป็นประพจน์ ซึ่ง R มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ $P \to (Q \to R)$

Sol พิจารณาประพจน์ $P \to (Q \to R)$

จาก $Q \to R$

$? \to T = T$ แน่นอน

ดังนั้น $Q \to R = T$

แล้ว $P \to (Q \to R)$

$? \to T = T$ แน่นอน โดยไม่สนใจว่า $P = T$ หรือ $P = F$

$\therefore$ $P \to (Q \to R)$ เมื่อ $R = T$ มีค่าความจริงเป็น T = จริง ตอบ

Ex10 ให้ P, Q และ R เป็นประพจน์ ซึ่ง $P = T$
จงหาค่าความจริงของ $[(\sim P) \wedge Q] \to [R \vee P]$

Sol จากรูปแบบประพจน์ $[(\sim P) \wedge Q] \to [R \vee P]$ เมื่อ $P = T$

$\sim P$: $T \to F$; $(\sim P) \wedge Q = F$; $R \vee P = T$

$F \to T = T$

หรือดูง่ายๆ $F \to ? = T$ แน่นอน

หรือดูง่ายๆ $? \to T = T$ แน่นอน ตอบ

Ex11 กำหนดให้ ค่าความจริงของ $P = T$
$Q = F$
$R = T$
และ $S = F$

จงหาค่าความจริง ของประพจน์ต่อไปนี้

1) $[P \wedge (\sim Q)] \leftrightarrow (R \vee S)$

$T \wedge T$ → T; $T \vee F$ → T

$T \leftrightarrow T$ → T

2) $[[P \vee Q] \wedge (\sim R)] \to Q$

$T \vee F$ → F; $\sim R$: T → F

$F \wedge F$ → F

$F \to F$ → T

3) $Q \leftrightarrow [(P \wedge S) \vee R]$

$T \wedge F$ → F

$F \vee T$ → T

$F \leftrightarrow T$ → F

4) $\sim [P \wedge Q] \leftrightarrow [(\sim P) \vee (\sim Q)]$

$T \wedge F$ → F → $\sim$: T

$\sim P$: T → F; $\sim Q$: F → T; $F \vee T$ → T

$T \leftrightarrow T$ → T

5) $[(P \to Q) \wedge R] \leftrightarrow [R \vee (\sim S)]$

$T \to F$ → F; $F \wedge T$ → F

$\sim S$: F → T; $T \vee T$ → T

$F \leftrightarrow T$ → F

6) $[[P \to Q] \to R] \leftrightarrow S$

$T \to F$ → F

$F \to T$ → T

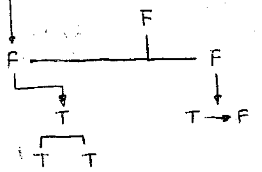
$T \leftrightarrow F$ → F

ตอบ

Ex12 ให้ P, Q, R และ S เป็นประพจน์ และค่าความจริงของ

$[\sim(P \wedge Q)] \vee (R \to S)$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ P, Q, R และ S

Sol จากประพจน์ $[\sim(P \wedge Q)] \vee [R \to S]$



$\therefore$ P = T

Q = T

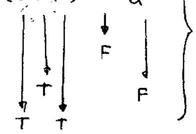
R = T

S = F

ตอบ

Ex13 ให้ P, Q, R และ S เป็นประพจน์ และ $P \vee Q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $(S \wedge R) \to Q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ P, Q, R และ S

Sol จาก $P \vee Q$ และ $(S \wedge R) \to Q$

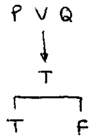


Q = F

R = T

S = T

เมื่อ Q = F ;



$\therefore$ ได้ P = T

Q = F

R = T

S = T

ตอบ

6. สัจนิรันดร์ (Tautology)

สัจนิรันดร์ คือ รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

เช่น $(P \wedge Q) \to P$; $\sim(P \to Q) \to (P \wedge \sim Q)$ หรือ $[P \to (Q \vee R)] \vee [Q \leftrightarrow (P \wedge R)]$ เป็นต้น

วิธีตรวจสอบ สัจนิรันดร์ คือ 1. สร้างตารางหาค่าความจริง

** 2. การตรวจสอบโดยหาข้อขัดแย้ง

นั่นคือ สมมุติว่า ประพจน์ดังกล่าว มีค่าความจริงเป็น F

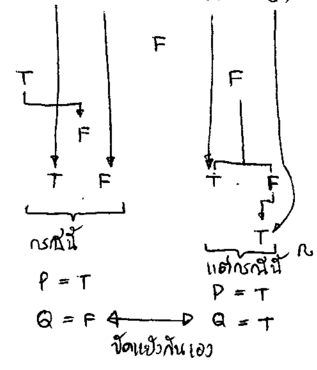
แล้วหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยแต่ละตัวว่า มีการขัดแย้งกันหรือไม่

→ ถ้าใช่ [ขัดแย้งจริงๆ] ก็แสดงว่า ไม่เป็นสัจนิรันดร์

→ ถ้าไม่ใช่ [ไม่ขัดแย้งจริงๆ] มีคือ "สมมุติว่าเป็น F แต่ไม่ได้เป็น F จริงๆ" ก็แสดงว่า "เป็น สัจนิรันดร์"

Ex14 จงพิจารณารูปแบบของประพจน์ $\sim(P \to Q) \longrightarrow (P \wedge \sim Q)$

Sol พิจารณาประพจน์ $\sim(P \to Q) \longrightarrow (P \wedge \sim Q)$ แล้วสมมุติให้ค่าความจริงรวม เป็น F



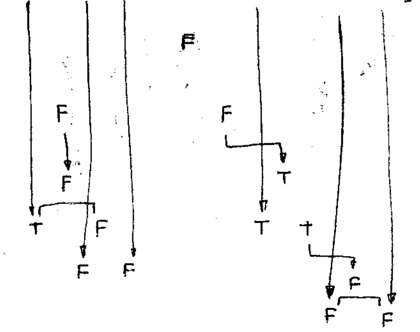
$\therefore$ เป็นสัจนิรันดร์

ตอบ

⊚ การตรวจสอบสัจนิรันดร์ ด้วยเงื่อนไข (หรือ)

<u>Ex 15</u> จงตรวจสอบว่าประพจน์ $[P \wedge (Q \vee R)] \vee \sim[P \wedge \sim(Q \vee R)]$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ?

<u>Sol</u> จากรูปแบบของประพจน์ $[P \wedge (Q \vee R)] \vee \sim[P \wedge \sim(Q \vee R)]$



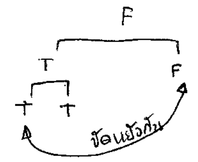
สังเกตว่า P, Q, R ไม่มีความขัดแย้ง เมื่อกำหนดค่าความจริงเป็น F [คือกำหนดให้เป็น F ก็เป็น F ได้จริง ๆ]

∴ ประพจน์ดังกล่าว <u>ไม่เป็นสัจนิรันดร์</u>

⊚ การตรวจสอบสัจนิรันดร์ ด้วยเงื่อนไข ถ้า ... แล้ว ... $[\,?_1 \rightarrow ?_2\,]$

<u>Ex 16</u> จงตรวจสอบว่า $(P \wedge Q) \rightarrow P$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ?

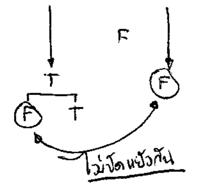
<u>Sol</u> พิจารณาประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$



∴ เป็นสัจนิรันดร์ <u>ตอบ</u>

<u>Ex 17</u> จงตรวจสอบว่า ประพจน์ $(P \vee Q) \rightarrow P$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ?

<u>Sol</u> พิจารณาประพจน์ $(P \vee Q) \rightarrow P$



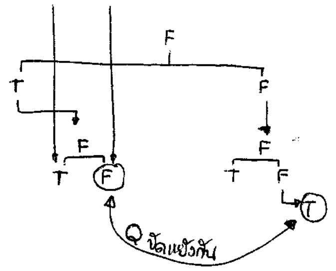
∴ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ <u>ตอบ</u>

⊚ การตรวจสอบสัจนิรันดร์ ด้วยเงื่อนไข ... ก็ต่อเมื่อ ... (... $\leftrightarrow$ ...)

<u>Ex 18</u> จงตรวจสอบว่า $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

<u>Sol</u> พิจารณาประพจน์ $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$

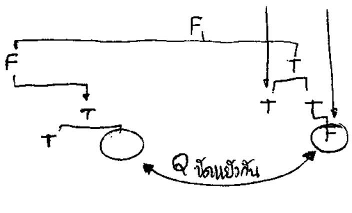
☑ สมมุติว่า $T \leftrightarrow F$;
$= F$



∴ เป็นสัจนิรันดร์ <u>กรณีแรก</u>

☑ สมมุติว่า $F \leftrightarrow T$;
$= F$

$\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$



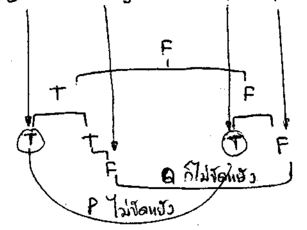
∴ เป็นสัจนิรันดร์ <u>กรณีที่สอง</u>

∴ ประพจน์ $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$
เป็นสัจนิรันดร์ <u>ตอบ</u>

Ex19 จงตรวจสอบว่า รูปแบบของประพจน์ $[P \vee (\sim Q)] \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่ ?

Sol จากรูปแบบของประพจน์ $[P \vee (\sim Q)] \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

สมมติรูปแบบของ $T \leftrightarrow F$ ให้เป็น F

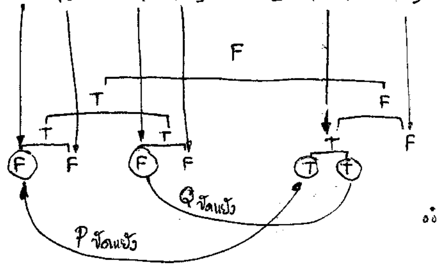


∴ ประพจน์ดังกล่าว ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ตอบ

(ทดลองกรณีหรือ $T \leftrightarrow F$ ก็พบแล้วว่า ไม่เป็นสัจนิรันดร์)

Ex20 จงตรวจสอบรูปแบบของ $[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R]$ เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

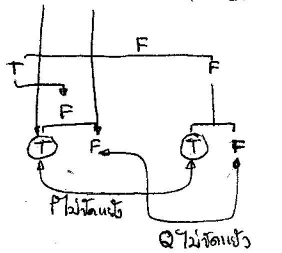
Sol จากรูปแบบของ $[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R]$



∴ ประพจน์ดังกล่าว เป็นสัจนิรันดร์ ตอบ

Ex21 จงตรวจสอบรูปแบบของ $\sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$ ว่าเป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

Sol จากรูปแบบของ $\sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$



∴ ประพจน์ดังกล่าวไม่เป็นสัจนิรันดร์ ตอบ

7. รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

> รูปแบบของประพจน์สองรูปแบบใดๆ จะถูกเรียกว่า เป็นรูปแบบที่สมมูลกัน ก็ต่อเมื่อ รูปแบบของประพจน์ ทั้งสอง มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

การตรวจสอบ ทำได้ 2 รูปแบบคือ

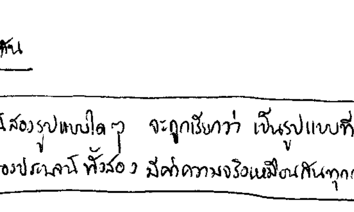
1. การตรวจสอบโดยสร้างตาราง ค่าความจริง
2. การตรวจสอบโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับรูปแบบของประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์

▷ เนื่องจากรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน มีค่าความจริงเหมือนกันทุกประการ ดังนั้น ถ้าเอารูปแบบ ที่สมมูลกัน มาเชื่อมด้วย $\leftrightarrow$ ก็จะได้รูปแบบของประพจน์ใหม่ขึ้นมาอีกรูปแบบหนึ่ง โดยรูปแบบใหม่นี้ จะมีลักษณะเป็น สัจนิรันดร์ ☆

▷ หรือกล่าวได้ว่า ถ้ารูปแบบของประพจน์ $\square \leftrightarrow \triangle$ มีความเป็นสัจนิรันดร์แล้ว แสดงว่า ค่าความจริงของรูปแบบ $\square \leftrightarrow \triangle$ เป็นจริงทุกกรณี นั่นแสดงว่า $\square$ และ $\triangle$ ต้องมีค่าความจริงที่เหมือนกันนั่นเอง

Ex22 จงตรวจสอบว่า $\sim(P \wedge Q)$ สมมูลกับ $\sim P \vee \sim Q$ หรือไม่

Sol กำหนดให้ $\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ
นั่นคือ



หรืออีกกรณีหนึ่งคือ

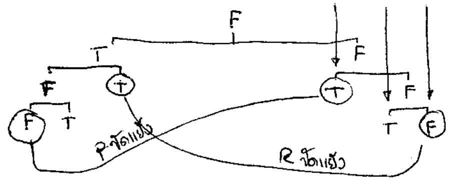
$\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$

∴ $\sim(P \wedge Q)$ สมมูลกับ $\sim P \vee \sim Q$ ตอบ

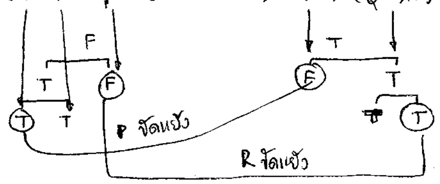
Ex23 จงตรวจสอบว่า $(P \wedge Q) \to R$ สมมูลกับ $P \to (Q \to R)$ หรือไม่

Sol กำหนดให้ $(P \wedge Q) \to R \longleftrightarrow P \to (Q \to R)$

กรณีที่ 1



กรณีที่ 2 $(P \wedge Q) \to R \longleftrightarrow P \to (Q \to R)$



$\therefore$ $(P \wedge Q) \to R$ สมมูลกับ $P \to (Q \to R)$ ตอบ

สัญลักษณ์ของรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน (☆☆)		
1. $P \to Q$	สมมูลกับ	$\sim Q \to \sim P$
2. $P \to Q$	———	$\sim P \vee Q$
3. $\sim(P \wedge Q)$	———	$\sim P \vee \sim Q$
4. $\sim(P \vee Q)$	———	$\sim P \wedge \sim Q$
5 $\sim(P \to Q)$	———	$P \wedge \sim Q$

Ex24 จงพิจารณาว่า $(P \wedge R) \to (Q \vee S)$ สมมูลกับ $\sim(Q \vee S) \to \sim(P \wedge R)$ หรือไม่

Sol กำหนดให้ $(P \wedge R) = M$

และ $(Q \vee S) = N$

$\therefore$ จะได้รูปแบบของ $(P \wedge R) \to (Q \vee S) = M \to N$

ซึ่ง $M \to N$ สมมูลกับ $\sim N \to \sim M$ โดยที่ $\sim N = (Q \vee S)$

และ $\sim M = \sim(P \wedge R)$

เมื่อ $M \to N$ สมมูลกับ $\sim N \to \sim M$

แสดงว่า $(P \wedge R) \to (Q \wedge S)$ สมมูลกับ $\sim(Q \wedge S) \to \sim(P \wedge R)$ ตอบ

Ex25 จงพิจารณาว่า $\sim[(P \vee Q) \to (P \wedge Q)]$ สมมูลกับ $(P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q)$ หรือไม่

Sol เนื่องจาก $\sim(P \to Q)$ สมมูลกับ $P \wedge \sim Q$

ดังนั้น $\sim[(P \vee Q) \to (P \wedge Q)]$ สมมูลกับ $(P \vee Q) \wedge \sim(P \wedge Q)$ โดยที่ $\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$

ดังนั้น $\sim[(P \vee Q) \to (P \wedge Q)]$ สมมูลกับ $(P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q)$ นั่นเอง ตอบ

8. นิเสธของรูปแบบของประพจน์

ถ้าเราพิจารณาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ $P \to Q$ และ $P \wedge \sim Q$ ดังตารางค่าความจริง ดังนี้

P	Q	$P \to Q$	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

สังเกตว่า ค่าความจริงของ $P \to Q$ และ $P \wedge \sim Q$ จะตรงข้ามกันทุกกรณี เรียกว่า "เป็นนิเสธของกันและกัน" หรือ "เป็นความขัดแย้งซึ่งกันและกัน"

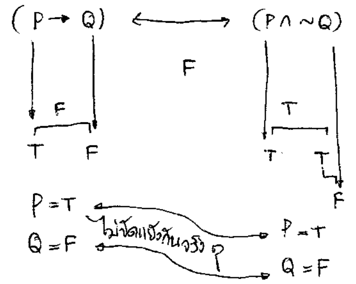
ซึ่งจากตัวอย่างข้างต้น สรุปได้ว่า $P \to Q$ เป็นนิเสธของ $P \wedge \sim Q$ หรือ $P \wedge \sim Q$ เป็นนิเสธของ $P \to Q$

ซึ่งตารางแสดงค่าความจริง ก็เป็นวิธีหนึ่งในการตรวจสอบการเป็นนิเสธกันของประพจน์

★ ซึ่งก็เราจะทดสอบการเป็นนิเสธของประพจน์ ด้วยวิธี "สัจนิรันดร์" หลัง
การสมมุติให้ $\triangle \longleftrightarrow \square$ แล้วให้ค่าความจริงเป็น F
ผลการพิสูจน์ ต้องไม่ขัดแย้งกัน คือเป็น F จริงๆ

Ex 26 ตัวอย่างเช่น จงใช้วิธีสัจนิรันดร์ในการพิสูจน์ว่า $P \to Q$ และ $P \wedge \sim Q$ เป็นนิเสธกันหรือไม่

Sol เราจะกำหนดให้ $(P \to Q) \longleftrightarrow (P \wedge \sim Q)$



$\therefore$ $P \to Q$ เป็นนิเสธกับ $P \wedge \sim Q$ นั่นเอง ตอบ

9. ประโยคเปิด

ประโยค หรือข้อความใดๆ ที่มีตัวแปรเข้ามาเกี่ยวข้อง และเราไม่สามารถหาค่าความจริงได้ เรียกประโยคนั้นว่า ประโยคเปิด เช่น

$x + 2 > 5$
$x^2 + y^2 = 10$
เธอไม่ได้ไปเที่ยวสยาม
เขาได้รับทุนการศึกษา

} ประโยคเหล่านี้ไม่ใช่ประพจน์ เพราะเราไม่ทราบค่าตัวแปร ของแต่ละประโยค

เรานิยมใช้ สัญลักษณ์ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปร x

$P(x,y) \longrightarrow x, y$

เช่น $P(x)$ แทน $x + 2 > 7$
$P(x,y)$ แทน $x^2 - y^2 = 25$ เป็นต้น

สรุป ประโยคบอกเล่าที่มีตัวแปร อาจเป็นประพจน์ได้ ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วนที่สำคัญ ต่อไปนี้
1. ส่วนที่เป็นประโยคเปิด
2. ส่วนที่บอกถึงเอกภพสัมพัทธ์
3. ส่วนที่บอกถึง ตัวบ่งปริมาณ

Notes การเชื่อมประโยคเปิด ด้วยตัวเชื่อม $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ ตลอดจนการเติม $\sim$ ซึ่งจะทำได้เช่นเดียวกับการเชื่อมประพจน์

10. ตัวบ่งปริมาณ

ในวิชาตรรกศาสตร์ จะมีตัวบ่งปริมาณอย่างคร่าวๆ อยู่ 2 ชนิด คือ

10.1) ตัวบ่งปริมาณ "ทั้งหมด" (Universal Quantifier) ได้แก่คำว่า "ทั้งหมด", "ทุกๆ", "แต่ละ" เป็นต้น
ซึ่งหมายถึง ต้องใช้ทุกสิ่งทุกอย่างในเอกภพสัมพัทธ์ และใช้สัญลักษณ์ $\forall$ แทน ตัวบ่งปริมาณ "ทั้งหมด"
นั่นคือ ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดใดๆ แล้ว $\forall x[P(x)]$ หมายถึง ทุกๆ ค่า x ใน $\mathcal{U}$ สอดคล้องกับ $P(x)$

Ex27
1) $\forall x[x+3>5]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{2,3,4,5\}$
อ่านว่า ทุกๆ ค่าของ x ใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $x+3>5$
หรือ แต่ละค่าของ x ใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $x+3>5$

2) $\forall x[(x>0) \to (x^2>0)]$ เมื่อ $\mathcal{U} = R$
อ่านว่า ทุกๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง ถ้า $x>0$ แล้ว $x^2>0$

3) $\forall x[(x=\pi) \vee (x+0=x)]$ เมื่อ $\mathcal{U} = I$
อ่านว่า ทุกๆ ค่า x ที่เป็นจำนวนเต็ม $x=\pi$ หรือ $x+0=x$

#

Ex 28 จงเขียนประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ ถ้าให้ $\mathcal{U}$ เป็นเซตของจำนวนจริง

1.) จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง

$\forall x\,[\,x \in I \rightarrow x \in R\,]$

2) แต่ละจำนวนเต็ม x ซึ่ง $(x)(x) = x^2$

$\forall x\,[\,x \in I \rightarrow (x)(x) = x^2\,]$

3) แต่ละจำนวนจริง x ซึ่ง $x . x = x^2$

$\forall x\,[\,x \in R \rightarrow x . x = x^2\,]$

4) สำหรับจำนวนจริงบวก x ทุกจำนวน $\sqrt{x^2} = |x|$

$\forall x\,[\,x \in R^+ \rightarrow \sqrt{x^2} = |x|\,]$ #

10.2) ตัวบอกปริมาณ "มีอย่างน้อยหนึ่ง" (Existential Quantifier)

ได้แก่คำว่า "บางอย่าง", "มีอย่างน้อยหนึ่ง" ซึ่งอย่างน้อย 1 สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ และใช้สัญลักษณ์ $\exists$ แทน
นั่นคือ ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดใดๆ แล้ว

$\exists x\,[P(x)]$ หมายถึง มี x อย่างน้อย 1 ตัวใน $\mathcal{U}$ ที่มีเงื่อนไข $P(x)$

Ex29 จงอ่านประพจน์ซึ่งมีตัวบ่งปริมาณ ดังนี้

1) $\exists x\,[\,x^2 = 4\,]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$

อ่านว่า มี x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $x^2 = 4$

2) $\exists x\,[\,x^2 + 2x - 3 = 0\,]$ เมื่อ $\mathcal{U} = I$

อ่านว่า มี x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $x^2 + 2x - 3 = 0$

3) $\exists x\,[(x > 0) \wedge (x^2 + x \geq 0)]$ เมื่อ $\mathcal{U} = R$

อ่านว่า มี x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $x > 0$ และ $x^2 + x \geq 0$

4) $\exists x\,[(x^2 = 4) \vee (2x = 4)]$ เมื่อ $\mathcal{U} = R$

อ่านว่า มีจำนวนจริง x อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $x^2 = 4$ หรือ $2x = 4$ #

Ex30 จงเขียนประโยคต่อไปนี้ ในรูปประโยคสัญลักษณ์ ถ้าให้ $\mathcal{U} = R$

1) จำนวนจริงบางจำนวน เป็นจำนวนเต็ม

$\exists x\,[(x \in R) \wedge (x \in I)]$

2) จำนวนจริง x อย่างน้อย 1 จำนวน ที่ทำให้ $x^2 = \sqrt{2}$

$\exists x\,[\,x^2 = \sqrt{2}\,]$ หรือ $\exists x\,[(x \in R) \wedge (x^2 = \sqrt{2})]$

3) มีจำนวนจริงบวก x อย่างน้อย 1 จำนวนที่ทำให้ $x^2 - 2x + 3 = 0$

$\exists x\,[(x > 0) \wedge (x^2 - 2x + 3 = 0)]$

11. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

Ex31 จากประโยค $\forall x\,[\,x + 3 > 5\,]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{4, 5, 6\}$ หมายถึง

ทุกๆ ค่าของ x ใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $x + 3 > 5$

เมื่อนำสมาชิกทุกตัวใน $\mathcal{U}$ ไปแทนค่า x ในประโยคเปิด $x + 3 > 5$ แล้วทำให้ประโยคสัญลักษณ์มีค่าความจริงเป็นจริง

แทนค่า $x = 4$ จะพบว่า $4 + 3 > 5$ จริง

$x = 5$ —"— $5 + 3 > 5$ จริง

$x = 6$ —"— $6 + 3 > 5$ จริง เช่นกัน

จากการแทนค่า จะพบว่า สมาชิกทุกตัวใน $\mathcal{U}$ ต่างก็ทำให้ประโยค $x + 3 > 5$ เป็นจริง

★ ดังนั้น $\forall x\,[\,x + 3 > 5\,]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{4, 5, 6\}$ มีค่าความจริงเป็นจริง

★★ ในทางตรงข้าม ถ้ามีสมาชิกใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ประโยคสัญลักษณ์ $x + 3 > 5$ เป็นเท็จ แสดงว่า [ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวนั้น มีค่าความจริงเป็น เท็จ] ตอบ

> ▷ $\forall x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
> เมื่อนำสมาชิกทุกตัวใน $\mathcal{U}$ ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง
>
> ▷ $\forall x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
> เมื่อมีสมาชิกใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

Ex 32

$\forall x [P(x)]$	เอกภพสัมพัทธ์ ($\mathcal{U}$)	ค่า x ใน $\mathcal{U}$ ที่ทำให้ $P(x)$		ค่าความจริงของ $\forall x [P(x)]$
		เป็นจริง	เป็นเท็จ	
$\forall x [x \geq 0]$	$\{-2,-1,0,1,2\}$	$0,1,2$	$-2,-1$	F
$\forall x [x+1 > x]$	$\{-1,0,1\}$	$-1,0,1$	-	T
$\forall x [x+1 \geq x]$	R	$x \in R$	-	T
$\forall x [\sqrt{x^2} = x]$	R	$x \geq 0$	$x < 0$	F
$\forall x [2x^2+3x+1=0]$	I^-	-1	$x \in I^-$ และ $x \neq -1$	F

ต่อไปพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $\exists x [P(x)]$

Ex 33 จากประโยค $\exists x [x^2-2x-3=0]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{1,2,3,4\}$

หมายถึง "มี x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $x^2-2x-3=0$"

และถ้าเราแทนค่า $x = 3$ ไปแทนค่าในสมการ $x^2-2x-3=0$

จะได้ $3^2-2(3)-3 = 9-6-3 = 9-9 = 0$ จริง

แสดงว่า มีค่า x บางค่า ที่ทำให้ $x^2-2x-3=0$ เป็นจริง

จึงสรุปได้ว่า $\exists x [x^2-2x-3=0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตอบ

★ กรณี $\exists x [P(x)]$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ แสดงว่าต้องไม่มีสมาชิกใน $\mathcal{U}$ แม้เพียงตัวเดียว ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง นั่นคือ ถ้าเรากำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathcal{U}$ เราสามารถสรุปค่าความจริง-ของ $\exists x [P(x)]$ ได้ดังนี้

> ▷ $\exists x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อมีสมาชิกใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ซึ่งนำไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง
>
> ▷ $\exists x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อนำสมาชิกทุกตัวใน $\mathcal{U}$ ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ไม่มีสมาชิกใน $\mathcal{U}$ แม้แต่ตัวเดียว ที่ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

Ex34

$\exists x [P(x)]$	เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$	ค่า x ใน $\mathcal{U}$ ที่ทำให้ $P(x)$		ค่าความจริงของ $\exists x [P(x)]$
		เป็นจริง	เป็นเท็จ	
$\exists x [x \geq 0]$	$\{-2,-1,0,1,2\}$	$0,1,2$	$-2,-1$	T
$\exists x [x+1 > x]$	$\{-1,0,1\}$	$-1,0,1$	ไม่มี	T
$\exists x [x^2 = -1]$	I	ไม่มี	$x \in I$	F
$\exists x [2x^2+3x+1=0]$	I^+	ไม่มี	$x \in I^+$	F
$\exists x [\sqrt{x^2} = x]$	R	$x \geq 0$	$x < 0$	T

#

Ex35 จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้

$\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1. $\exists x [-\sqrt{x+6} = x]$
2. $\exists x [x^2 = 2x]$
3. $\forall x \left[\frac{x^2-4}{x+2} = x-2\right]$
4. $\forall x [x^3 + 6 \geq x]$

Sol

1. ถ้า $x = -2$ จะได้ $-\sqrt{x+6} = -\sqrt{-2+6} = -\sqrt{4} = -2$

$\therefore -\sqrt{x+6} = x$

นั่นคือ มีค่า x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $-\sqrt{x+6} = x$ เป็นจริง

$\therefore \exists x [-\sqrt{x+6} = x]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ตอบ

2. ถ้า $x = 2$ จะพบว่า $2^2 = 2(2)$ จริง

นั่นคือ มีค่า x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $x^2 = 2x$ เป็นจริง

$\therefore \exists x [x^2 = 2x]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ตอบ

3. ถ้า $x = -2$ จะพบว่า $\frac{x^2-4}{x+2}$ หาค่าไม่ได้ [ทำให้ตัวส่วนเป็น 0]

นั่นคือ มีค่า x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $\frac{x^2-4}{x+2} = x-2$ เป็นเท็จ

$\therefore \forall x \left[\frac{x^2-4}{x+2} = x-2\right]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ตอบ

4. จากประโยคเปิด $x^3 + 6 \geq x$

ทุกๆ ค่า x ใน $\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ที่ทำให้ $x^3 + 6 \geq x$ เป็นจริง

$\therefore \forall x [x^3 + 6 \geq x]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ตอบ

Ex36 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

โดย $P(x)$ แทนประโยค " x หารด้วย 2 ลงตัว"

$Q(x)$ ——— " x เป็นจำนวนคี่ "

$R(x)$ ——— " x เป็นจำนวนเฉพาะ "

จงหาค่าความจริงของประโยค ต่อไปนี้

1. $\forall x [P(x) \to Q(3)]$

Sol เนื่องจาก $P(x) \to Q(3)$ โดยที่ $Q(3) = 3$ เป็นจำนวนคี่ $= T$

$P(x) \to T$

$\downarrow$

T แน่นอน

ดังนั้น $\forall x [P(x) \to Q(3)]$ มีค่าความจริง เป็นจริง ตอบ

2. $\forall x [Q(x) \vee R(x)]$

Sol พิจารณาว่า ถ้า $x = 4$ จะได้ $\underbrace{\underset{F}{Q(x)} \vee \underset{F}{R(x)}}_{F}$

นั่นคือ มี x อย่างน้อย 1 ค่า $(x = 4)$ ใน $\mathcal{U}$ ที่ทำให้ $Q(x) \vee R(x)$ เป็นเท็จ

3. $\exists x [\sim Q(x) \to R(1)]$

Sol เนื่องจาก $R(1)$ คือ 1 เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งเป็นเท็จ (F)

ดังนั้น หาเพียงเหตุรูปแบบ เพียงรูปแบบเดียว ที่ทำให้ $\sim Q(x) = F$ หรือ $Q(x) = T$

ก็จะได้รูปแบบของ $\underbrace{\underset{F}{\sim Q(x)} \to \underset{F}{R(1)}}_{T}$ } นั่นคือ แค่แทน $x = 2, 3$ หรือ 5 ก็จะทำให้ $Q(x) = T$

$\therefore \exists x [\sim Q(x) \to R(1)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ตอบ

<u>สรุป</u> ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปร x และเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\mathcal{U}$ แล้ว

1. ถ้า $\forall x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $\exists x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ถ้า $\forall x\,[P(x)]$ มีค่าความจริง เป็นเท็จแล้ว เราไม่สามารถ สรุป เกี่ยวกับค่าความจริงของ $\exists x\,[P(x)]$ ได้อย่างแน่นอน
3. ถ้า $\exists x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับค่าความจริงของ $\forall x\,[P(x)]$ ได้อย่างแน่นอน
4. ถ้า $\exists x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $\forall x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ อย่างแน่นอน

12. <u>ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณมากกว่า 1 ตัว</u>

ถ้าประโยคเปิด มีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว เช่น

$x+y > 5$ --- (1)

$x^2+y^2 = 25$ --- (2)

ในประโยคเปิด (1) และ (2) ถ้าเรารู้ค่า x และ y เราจะรู้ว่าประโยคดังกล่าวเป็นจริง หรือเท็จ ∴ เราต้องกำหนดขอบเขตหรือ $\mathcal{U}$ และต้องมีตัวบ่งปริมาณของ x และตัวบ่งปริมาณของ y

$x^2-y = 4z$ ... (3) เป็นต้น → ในทำนองเดียวกัน ในประโยคเปิด (3) นี้ ก็ต้องมีตัวบ่งปริมาณ 3 ตัว โดยเป็นตัวบ่งปริมาณของ x, y และ z นั่นเอง

<u>Ex 37</u> ให้ $\mathcal{U} = \{-2,-1,0,1,2\}$ และ $P(x,y)$ หมายถึง $x+y = y+5$

✓ ให้พิจารณาเงื่อนไข $\forall x \forall y\,[x+y = y+5]$ → เป็นประพจน์ เพราะสามารถหาค่าความจริงได้

✓ 〃 $\exists x \exists y\,[x+y = y+5]$ → ก็เป็นประพจน์ 〃 เช่นกัน

$\boxed{\text{กล่าวโดยสรุปคือ}}$ ถ้ามีประโยคเปิด $P(x,y)$ และเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ โดยที่ x และ y เป็นตัวแปรในประโยคเปิด $P(x,y)$ จะสามารถใส่ตัวบ่งปริมาณในประโยคเปิด $P(x,y)$ เพื่อทำให้เป็นประพจน์ได้ 4 แบบ ดังนี้

1. $\forall x \forall y\,[P(x,y)]$ = ทุกๆ คู่ของ x และ y ใน $\mathcal{U}$ ที่ให้ $P(x,y)$
2. $\exists x \exists y\,[P(x,y)]$ = สำหรับบางค่าของ x และบางค่าของ y ใน $\mathcal{U}$ ที่ให้ $P(x,y)$
3. $\forall x \exists y\,[P(x,y)]$ = สำหรับทุกๆ ค่าของ x จะมี y อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x,y)$
4. $\exists x \forall y\,[P(x,y)]$ = มี x ใน $\mathcal{U}$ อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้เกิด $P(x,y)$ สำหรับทุกๆ ค่าของ y

<u>Ex 38</u> ตัวอย่างการเขียนประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณมากกว่า 1 ตัว เมื่อกำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

1) $\forall x \exists y\,[[(x+y) > 10] \vee (x^2+y^2 = 3)]$
2) $\forall x \forall y\,[x^3+y^3 > 9]$
3) $\exists x \exists y\,[x^2-y = y^2-x]$ เป็นต้น

13. <u>ค่าความจริงของประพจน์ ที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว</u>

▷ ในการแทนค่าว่าประโยคเปิด $P(x,y)$ ใดๆ เป็นจริงหรือเท็จนั้น ☆ ในแต่ละครั้ง เราต้องแทนค่า x หนึ่งค่า และค่า y หนึ่งค่า → ในประโยคดังกล่าวพร้อมกัน จึงจะทราบว่าประโยค $P(x,y)$ เป็นจริงหรือเท็จ เพื่อให้ ง่ายในการแทนค่าออก ดังนั้น ในการแทนค่า x และ y ในแต่ละครั้งนั้น เราจะกล่าวว่า แทนค่า x และ y แต่ละคู่ในประโยคเปิด $P(x,y)$

1. ค่าความจริงของประโยค $\forall x \forall y\,[P(x,y)]$

> **บทนิยาม** ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ประโยค $\forall x \forall y\,[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น
> **จริง** เมื่อค่าของ x และ y ใน U ทุกๆ คู่ ต่างทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นจริง
> **เท็จ** เมื่อค่าของ x และ y ใน U อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นเท็จ

Ex 39 เมื่อกำหนดให้ $U = \{3,4,5\}$ จงพิจารณาว่าประโยค $\forall x \forall y\,[x+y^2 > 7]$ มีค่าความจริงเป็นจริง หรือเท็จ

Sol ถ้าแทนค่า (x,y) ในแต่ละคู่ เช่น

$$(x,y) = \left.\begin{matrix}(3,3),(3,4),(3,5)\\(4,3),(4,4),(4,5)\\(5,3),(5,4),(5,5)\end{matrix}\right\}$$ จะได้ $x+y^2 > 7$ เป็นจริงทุกกรณี

จากการแทนค่า จะพบว่า ค่าของ x และ y ใน U ทุกคู่ ที่ทำให้ประโยค $x+y^2 > 7$ เป็นจริง

$\therefore$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $\forall x \forall y\,[x+y^2 > 7]$ มีค่าความจริงเป็นจริง **ตอบ**

Ex 40 เมื่อกำหนดให้ $U = \{-1,1,2\}$ จงพิจารณาว่าประโยค $\forall x \forall y\,[x^2-y<3]$ มีค่าความจริง เป็นจริง หรือเท็จ

Sol ให้พิจารณาค่าของ x และ y ทุกๆ คู่ใน U ดังนี้

x	y	$x^2-y<3$	ค่าความจริง	
-1	-1	$1+1<3$	T	
-1	1	$1-1<3$	T	
-1	2	$1-2<3$	T	
1	-1	$1+1<3$	T	
1	1	$1-1<3$	T	
1	2	$1-2<3$	T	
2	-1	$4+1<3$	F	★
2	1	$4-1<3$	F	★
2	2	$4-2<3$	T	

จะพบว่า มีค่า x และ y อยู่ 2 คู่ ที่ทำให้ประโยค $x^2-y<3$ เป็นเท็จ ★★

▷ แสดงว่า $\forall x \forall y\,[x^2-y<3]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ **ตอบ**

Ex 41 จงพิจารณาว่าประโยค $\forall x \forall y\,[x+y<xy]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อ $U = \{0,1,2\}$

Sol เนื่องจาก ถ้า $x=0,\ y=1$ จะได้ว่า

$0+1 < 0(1)$

หรือ $1<0$ ซึ่งเป็นเท็จ ★★

ทำให้รูปแบบของ $x+y<xy$ เมื่อ $x=0,\ y=1$ เป็นเท็จ

(มีค่า x และ y อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ $x+y<xy$ เป็นเท็จ)

$\therefore$ ประโยค $\forall x \forall y\,[x+y<xy]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ **ตอบ**

Ex 42 จงพิจารณาค่าความจริงของประโยค $\forall x \forall y\,[(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2]$ เมื่อ $U = \mathbb{R}$

Sol เมื่อ $U = \mathbb{R}$ จะเห็นว่า สมการ $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ เป็นจริงเสมอ

$\therefore$ $\forall x \forall y\,[(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2]$ มีค่าความจริงเป็นจริง **ตอบ**

2. ค่าความจริงของประโยค $\exists x \exists y\,[P(x,y)]$

> **บทนิยาม** ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ประโยค $\exists x \exists y\,[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น
> **จริง** เมื่อค่าของ x และ y อย่างน้อย 1 คู่ ใน U ที่ทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นจริง
> **เท็จ** เมื่อค่าของ x และ y ใน U ทุกๆ คู่ ที่ทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นเท็จ ทั้งหมด

Ex43 จงพิจารณาว่าประพจน์ $\exists x \exists y\, [x^2+y^2=9]$ มีค่าความจริงแบบไหน เมื่อกำหนดให้ $U = \{0, 2, 3\}$

Sol ประพจน์ $\exists x \exists y\, [x^2+y^2=9]$ จะมีค่าความจริงได้นั้น เราต้องหาค่า x และ y อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นจริง

สังเกตว่า ถ้า $x=0$ และ $y=3$ จะได้ $x^2+y^2=9$

$0^2+3^2=9$ จริง

และอีกกรณีหนึ่ง ถ้า $x=3$ และ $y=0$ จะได้ $3^2+0^2=9$ จริง เช่นกัน

ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า $\exists x \exists y\, [x^2+y^2=9]$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตอบ

Ex44 จงพิจารณาว่าประพจน์ $\exists x \exists y\, \left[\frac{x}{y}=\pi\right]$ มีค่าความจริง เป็นจริงหรือเท็จ เมื่อกำหนดให้ $U = \{1, 2, 3\}$

Sol สังเกตว่า ไม่ว่าจะแทน $x = 1, 2,$ หรือ 3

หรือแทนค่า $y = 1, 2, 3$ ก็ไม่ทำให้สมการ $\frac{x}{y}=\pi$ เป็นจริงได้

$\therefore$ ประพจน์ $\exists x \exists y\, \left[\frac{x}{y}=\pi\right]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ตอบ

Ex45 จงพิจารณาว่า ประพจน์ $\exists x \exists y\, [x+y=xy]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อ $U = I$

Sol จากสมการ

$$x+y = xy$$
$$xy - y = x$$
$$y(x-1) = x$$
$$y = \frac{x}{x-1}$$

จะเห็นว่า ถ้าแทนค่า $x=0$ และ $y=0$ จะได้สมการที่เป็นจริง

หรือถ้าแทนค่า $x=2$ และ $y=2$ ก็จะได้สมการที่เป็นจริง เช่นกัน

$\therefore$ มีค่า x และ y อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ประโยค $x+y=xy$ เป็นจริง

$\therefore$ ประพจน์ $\exists x \exists y\, [x+y=xy]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตอบ

③ ค่าความจริงของประพจน์ $\forall x \exists y\, [P(x,y)]$

> **บทนิยาม** ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ประพจน์ $\forall x \exists y\, [P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น
>
> **จริง** เมื่อ ทุกค่าของ x และอย่างน้อย 1 ค่าของ y ใน U ที่ทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นจริง
>
> **เท็จ** เมื่อมีค่า x อย่างน้อย 1 ค่า ที่ทำให้ไม่สามารถหาค่า y ใน U แล้วทำให้ประโยค $P(x,y)$ เป็นจริงได้

Ex46 จงพิจารณาว่า ประพจน์ $\forall x \exists y\, [xy=1]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อ $U = R$

Sol สังเกตสมการ $xy = 1$

ถ้า $x=0$ (โดย 0 อยู่ใน $U = R$) ทำให้ $xy = 0y \neq 1$

$\therefore$ มีค่า x อย่างน้อย 1 ค่า ที่ทำให้ สมการ $xy=1$ ไม่เป็นจริง

$\therefore$ ประพจน์ $\forall x \exists y\, [xy=1]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ตอบ

Ex 47 จงพิจารณาว่า $\forall y \exists x [y - x^2 > 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อ $\mathcal{U} = I^-$

Sol พิจารณา ค่า y ทุกค่าใน I^- คือ $y < 0$

ซึ่งจากอสมการ $y - x^2 > 5$

$y > 5 + x^2$

หรือ $y > x^2 + 5$ สังเกตว่า $y \in I^-$ แต่รูปแบบของ $x^2 + 5$ เป็นบวกเสมอ

โดยที่ $x^2 + 5 \geq 5$ แน่นอน

$\therefore$ ประพจน์ $\forall y \exists x [y - x^2 > 5]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ ตอบ

4. ค่าความจริงของประพจน์ $\exists x \forall y [P(x,y)]$

บทนิยาม ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ โดยที่ประพจน์ $\exists x \forall y [P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง เมื่อ x อย่างน้อย 1 ค่าใน $\mathcal{U}$ ที่ทำให้ $P(x,y)$ เป็นจริงในทุกๆ ค่าของ y เท็จ เมื่อไม่มี x ใน $\mathcal{U}$ แม้แต่ค่าเดียว ที่ทำให้ $P(x,y)$ เป็นจริงในทุกๆ ค่าของ y

Ex 48 จงพิจารณาว่า ประพจน์ $\exists x \forall y [x + y = y]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$

Sol จากรูปแบบประพจน์ $\exists x \forall y [x + y = y]$ นั้น

ต้องหาค่า x บางตัวที่ทำให้ y ทุกตัว ส่งผลให้สมการเป็นจริง

จากสมการ $x + y = y$

$\therefore x = y - y = 0$

เมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$ → สมการเป็นจริง ✓

$x = 0$ " $y = 1$ → " ✓

$x = 0$ " $y = 2$ → " ✓

$x = 0$ " $y = 3$ → " ✓

$\therefore$ ประพจน์ $\exists x \forall y [x + y = y]$ มีค่าความจริง เป็นจริง ตอบ

Ex 49 จงพิจารณาว่าประพจน์ $\exists y \forall x [y - x^2 > 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อ $\mathcal{U} = I^-$

Sol สังเกตว่า จากประโยค $y - x^2 > 5$

$y > x^2 + 5$ ซึ่ง $\forall y$ หมายถึง ค่า $y \in I^-$ ทุกตัว

ที่ทำให้ $y > x^2 + 5$ ซึ่ง เป็นเท็จ

เพราะ $x^2 + 5$ มีผลลัพธ์เป็น บวก เสมอ

$\therefore$ ประพจน์ $\exists y \forall x [y - x^2 > 5]$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ ตอบ

Note: มีหัวข้อเรื่อง 14. การสมมูลกันของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

15. นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

และ 16. การอ้างเหตุผล

เป็น 3 หัวข้อที่เหลือของบทที่ 3 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น
ซึ่งเราจะทะยอยจัดทำให้ครบในช่วงสัปดาห์สุดท้าย ของเดือน ก.ค. 2558
ถ้าน้องๆ นตท. ชั้นปีที่ 1 ต้องอ่านก่อน
ขอแนะนำให้อ่าน เนื้อหาดังกล่าว จากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ๆ
ซึ่งจัดทำโดย ส่วนการศึกษา รร.ตท. ไปสามารถอ่านทำความเข้าใจได้ด้วยตัวเอง
ก่อนครับ // Thai Cadet Admin
25 ก.ค. 58 [เวลา 01:25 น.]